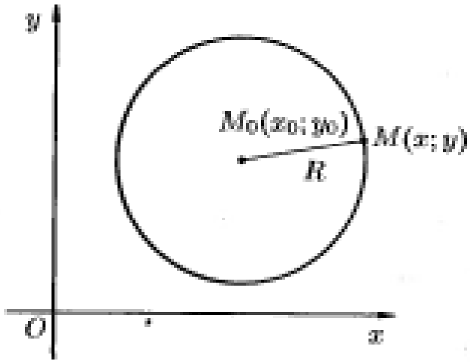
11.2. Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что ***окружностью*** радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$. Пусть точка M_0 в прямоугольной системе координат Oxy имеет координаты x_0, y_0, а $M(x;y)$ — произвольная точка окружности (см. рис. 48).



Тогда из условия $M_0M = R$ получаем уравнение

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R,$$

то есть

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2.} \quad (11.2)$$

2. Эллипс. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная.* Эту постоянную обозначают $2a$, расстояние между фокусами обозначают $2c$, при этом $a > c$. Если выбрать систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы, а начало координат лежало посредине между ними, то уравнение эллипса примет (канонический) вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b^2=a^2-c^2,\ a>b).$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты $F_1(c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$ (рис. 23).

Начало координат O — *центр симметрии* эллипса (или просто его центр), а оси координат — *оси симметрии* эллипса. Точки $A_1(-a,\ 0)$, $A_2(a,\ 0)$, $B_1(0,\ -b)$, $B_2(0,\ b)$ называются *вершинами* эллипса, а длины отрезков $a=OA_2$ и $b=OB_2$ — большой и малой *полуосями*. Величина

$$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$$

называется *эксцентриситетом* эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, так как выражается через отношение его полуосей:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a=b$, т. е. $\varepsilon=0$.

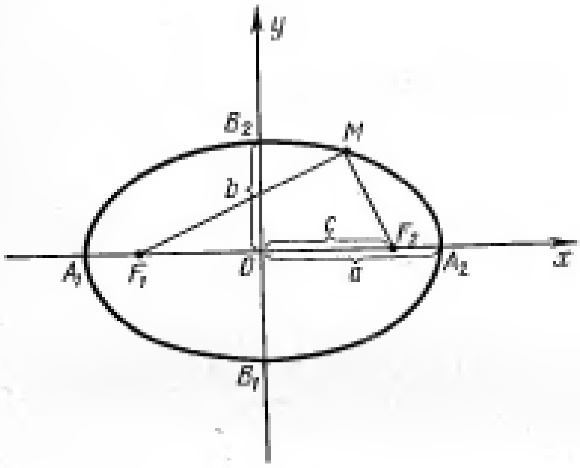


Рис. 23

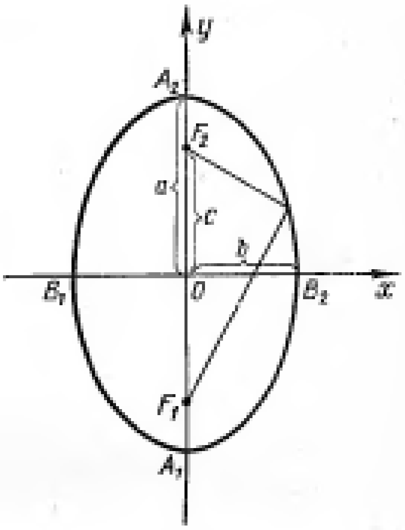


Рис. 24

Если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \ (a>b).$$

В этом случае координаты вершин $A_1(0,\ -a)$, $A_2(0,\ a)$, $B_1(-b,\ 0)$, $B_2(b,\ 0)$ и фокусов $F_1(0,\ -c)$, $F_2(0,\ c)$ (рис. 24).

90. Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Решение. Для данного эллипса $a=5$, $b=4$, и поэтому

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3.$$

Следовательно, фокусы имеют координаты $F_1(-3,\ 0)$ и $F_2(3,\ 0)$, эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$.

3. Гипербола. *Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, обозначаемая $2a$.* Расстояние F_1F_2 обозначается $2c$, причем $c > a$. Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2).$$

При этом ось Ox проходит через фокусы гиперболы, а начало координат находится посредине отрезка F_1F_2, так что c есть расстояние от фокуса до начала координат O. Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Оси координат являются *осями симметрии* гиперболы, а точка O — ее *центром симметрии*. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$, которые называются ее *действительными вершинами*, а величина $a = OA_2$ — *действительной полуосью* гиперболы. Точки $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ называются *мнимыми вершинами* гиперболы, а величина $b = OB_2$ — *мнимой полуосью* (рис. 25).

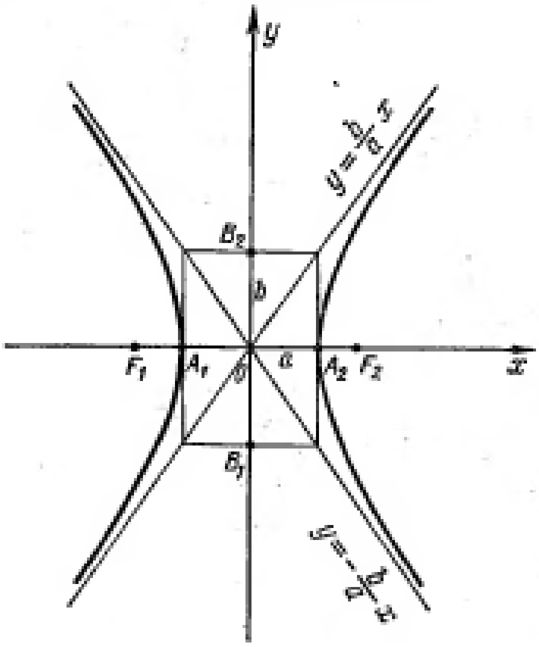


Рис. 25

Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется *основным прямоугольником гиперболы*. Его диагонали

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

являются асимптотами гиперболы, т. е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$$

Его можно выразить через полуоси гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

так что эксцентриситет характеризует вытянутость основного прямоугольника гиперболы. Если $a = b$, то гипербола называется *равносторонней*. В таком случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

Если фокусы гиперболы расположены на оси Oy (рис. 26), то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1.$$

В этом случае асимптоты гиперболы

$$x = \pm \frac{b}{a} y,$$

где a и b, как и выше, — действительная и мнимая полуоси. Вершины гиперболы (3): $A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$, $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$, фокусы $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$, где $c^2 = a^2 + b^2$.

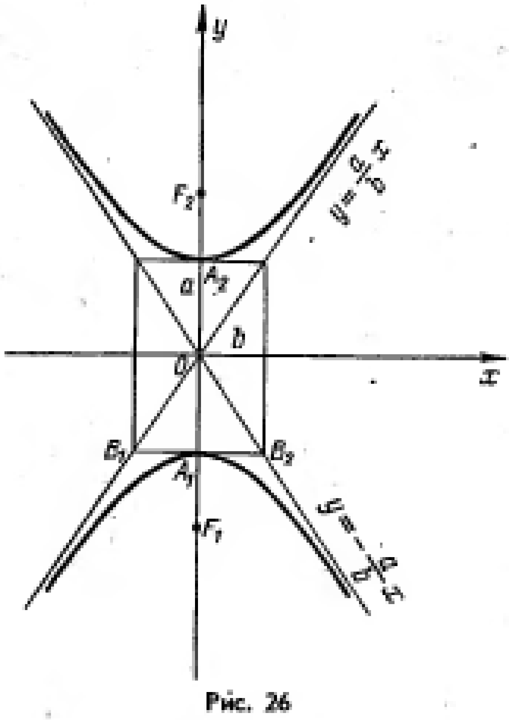


Рис. 26

4. Парабола. *Парабола есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой, не проходящей через эту точку (директрисы), расположенных в той же плоскости* (рис. 27).

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2=2px \quad (p>0),$$

где p — расстояние от фокуса до директрисы. При этом система координат выбрана так, что ось Ox проходит перпендикулярно директрисе через фокус, положительное ее направление выбрано от директрисы в сторону фокуса. Ось ординат проходит параллельно директрисе, посередине между директрисой и фокусом, откуда уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс — ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon=1$.

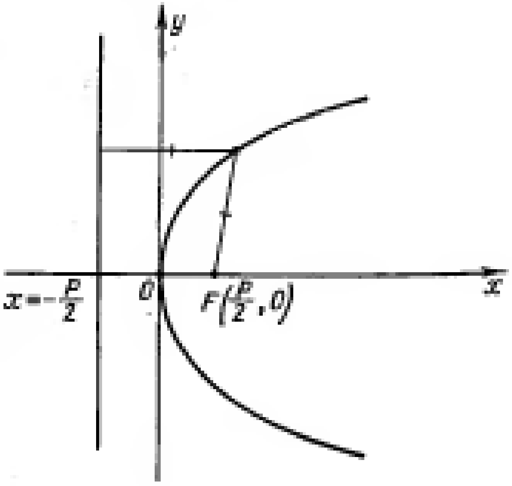


Рис. 27

В ряде случаев рассматривают параболы, заданные уравнениями: а) $y^2=-2px$, б) $x^2=2py$, в) $x^2=-2py$ (для всех случаев $p>0$): В случае а) парабола симметрична относительно оси Ox и направлена в отрицательную сторону

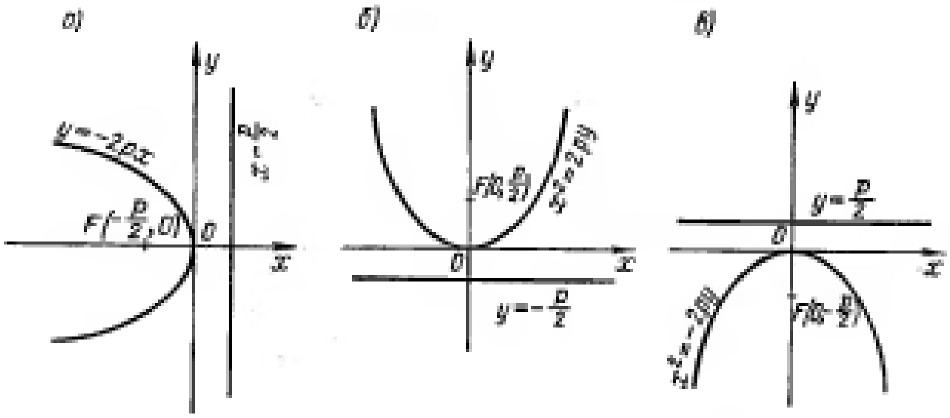


Рис. 28

(рис. 28, *а*). В случаях б) и в) осью симметрии является ось Oy (рис. 28, *б*, *в*). Координаты фокусов для этих случаев:

$$а)\ F\left(-\frac{p}{2}, 0\right), \quad б)\ F\left(0, \frac{p}{2}\right), \quad в)\ F\left(0, -\frac{p}{2}\right).$$

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

1. Использование параллельного переноса осей координат.

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

где коэффициенты A, B и C одновременно в ноль не обращаются. С помощью преобразования системы координат уравнение линии второго порядка может быть приведено к простейшему (каноническому) виду. Если в уравнении (1) коэффициент $B=0$, то оно имеет вид

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (2)$$

Это уравнение преобразуется к простейшему виду с помощью параллельного переноса осей координат по формулам

$$\begin{cases} x=x'+x_0, \\ y=y'+y_0, \end{cases} \qquad (3)$$

где (x_0, y_0) — координаты нового начала O' (в старой системе координат). Новые оси $O'x'$ и $O'y'$ параллельны старым. Точка O' является центром эллипса или гиперболы и вершиной в случае параболы.

Приведение уравнения (2) к простейшему виду удобно делать методом выделения полных квадратов аналогично тому, как это делалось выше для окружности.

113. Уравнение линии второго порядка

$$9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$$

привести к простейшему виду. Определить вид и расположение этой линии. Найти координаты фокусов. Сделать чертеж.

Решение. Группируем члены, содержащие только x и только y, вынося коэффициенты при x^2 и y^2 за скобку:

$$9(x^2-10x)+16(y^2+2y)+97=0.$$

Дополняем выражения в скобках до полных квадратов:

$$9(x^2-2\cdot 5x+25-25)+16(y^2+2y+1-1)+97=0,$$

$$9[(x-5)^2-25]+16[(y+1)^2-1]+97=0,$$

$$9(x-5)^2+16(y+1)^2-225-16+97=0.$$

Таким образом, данное уравнение преобразовано к виду

$$9(x-5)^2+16(y+1)^2-144=0.$$

Обозначаем

$$\begin{cases} x'=x-5, \\ y'=y+1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=x'+5, \\ y=y'-1. \end{cases}$$

Сравнивая с уравнениями (3), видим, что эти формулы определяют параллельный перенос осей координат в точку $O'(5, -1)$. В новой системе координат уравнение запишется так:

$$9x'^2+16y'^2-144=0.$$

Перенеся свободный член вправо и разделив на него, получим

$$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1.$$

Итак, данная линия второго порядка есть эллипс с полуосями $a=4$, $b=3$. Центр эллипса находится в новом начале координат O' (5, -1), а его фокальная ось есть ось $O'x'$. Расстояние фокусов от центра $c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\approx 2,6$, так что новые координаты правого фокуса F_2: $x'=\sqrt{7}$, $y'=0$. Старые координаты этого же фокуса находится из формул параллельного переноса:

$$x=x'+5=\sqrt{7}+5,$$
$$y=y'-1=0-1=-1.$$

Аналогично, новые координаты левого фокуса F_1: $x'=-\sqrt{7}$, $y'=0$. Его старые координаты: $x=-\sqrt{7}+5$, $y=-1$.

Чтобы начертить данный эллипс, наносим на чертеж старые и новые координатные оси. По обе стороны от точки O' откладываем по оси $O'x'$ отрезки длины $a=4$, а по оси $O'y'$ — длины $b=3$; получив таким образом вершины эллипса, чертим сам эллипс (рис. 29).

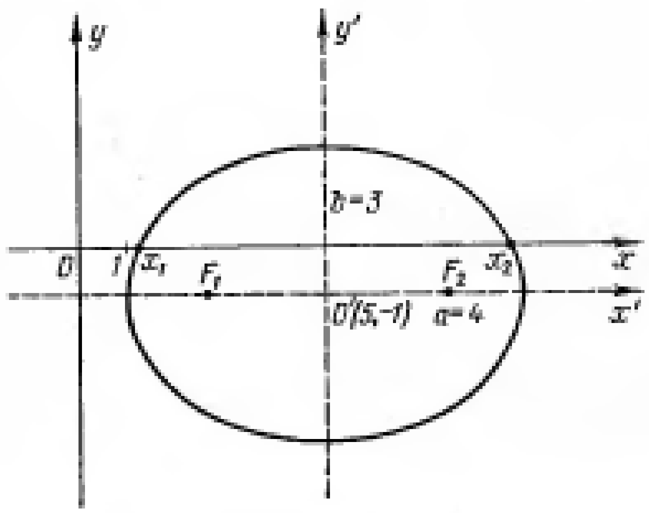


Рис. 29

2. Использование поворота осей координат. Общее уравнение второй степени (1) преобразуется к виду (2), т. е. к рассмотренному в п. 1 случаю, с помощью поворота координатных осей на угол α по формулам

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha, \tag{4}$$

где X, Y — новые координаты. Угол α находится из уравнения

$$B\,\mathrm{tg}^2\alpha + (A - C)\,\mathrm{tg}\,\alpha - B = 0. \tag{5}$$

Оси координат поворачиваются при этом так, чтобы новые оси OX и OY были параллельны осям симметрии линии второго порядка.

Зная $\mathrm{tg}\,\alpha$, можно найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по формулам тригонометрии

$$\sin\alpha = \pm\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

Если угол поворота α условиться считать острым, то в этих формулах надо брать знак плюс, и для $\mathrm{tg}\,\alpha$ надо взять также положительное решение уравнения (5). В частности, при $A = C$ систему координат нужно повернуть на угол

$\alpha = \frac{\pi}{4}$. Формулы поворота на угол $\frac{\pi}{4}$ имеют вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y). \tag{6}$$

123. Уравнение линии второго порядка

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

привести к простейшему виду. Установить вид и расположение этой линии.

Решение. В данном случае $A = 5$, $B = 2$ *, $C = 8$, поэтому угол поворота α находится из уравнения

$$2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2 = 0.$$

Решения этого уравнения $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$. Ограничиваясь острым углом α, берем первое из них. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

и

$$x = \frac{X - 2Y}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2X + Y}{\sqrt{5}}.$$

Подставляем эти значения x и y в данное уравнение:

$$5\left(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\cdot\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2X+Y}{\sqrt{5}} + 8\left(\frac{2X+Y}{\sqrt{5}}\right)^2 - 36 = 0,$$

или

$$(X-2Y)^2 + \frac{4}{5}(X-2Y)(2X+Y) + \frac{8}{5}(2X+Y)^2 = 36.$$

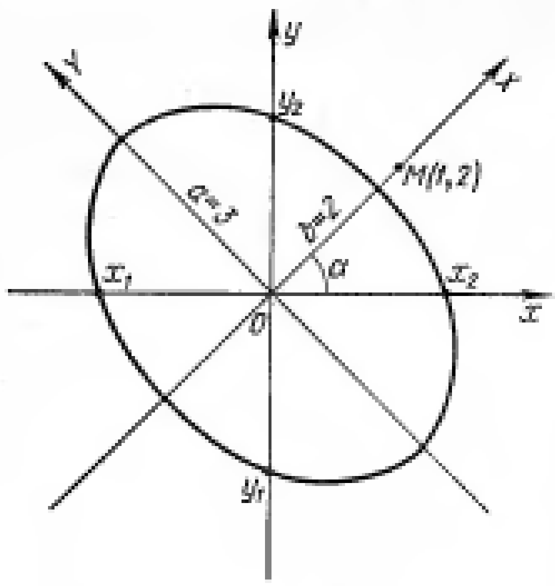


Рис. 33

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим

$$9X^2 + 4Y^2 = 36.$$

Наконец, разделив на свободный член, придем к уравнению эллипса

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует, что $a = 3$, $b = 2$, причем большая ось эллипса направлена по оси OY, а малая — по оси OX.

Для построения этого эллипса нанесем на чертеж повернутые оси OX и OY. Для этого на оси Ox отложим единицу масштаба, а на оси Oy — две. Получится точка M (1, 2), радиус которой OM наклонен к оси Ox под углом α, для которого $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$. Следовательно, через эту точку M и пройдет новая ось абсцисс. Затем отмечаем на осях OX и OY вершины эллипса и чертим сам эллипс (рис. 33). Заметим, что данный эллипс пересекает старые координатные оси в точках, которые находятся из квадратных уравнений (если в данном уравнении положить $y = 0$ или $x = 0$):

$$5x^2 - 30 = 0 \quad \text{и} \quad 8y^2 - 36 = 0.$$

Отсюда

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{7{,}2}\ (\approx \pm\, 2{,}7), \quad y_{1,2} = \pm\sqrt{4{,}5}\ (\approx \pm\, 2{,}1).$$